

MAI 1 - 13. cvičení

Určitý integrál Reimannův, resp. Newtonův (nabídka příkladů, můžete si vybírat):

1. Výpočet určitého integrálu (Newton-Leibnizova formule, užití substituce a integrace per partes).

Vypočítejte integrály (a rozhodněte zda integrál je Reimannův nebo Newtonův):

1. Jednoduché integrály na začátek:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx ; \int_0^5 |x^2 - 3x + 2| dx ; \int_0^\pi \sin x dx ; \int_2^3 \frac{1}{1-x^2} dx ; \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx ; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx ; \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx ;$$
$$\int_0^\infty e^{-x} dx ; \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx ; \int_1^\infty \frac{1}{x} dx .$$

2. Výpočet integrálu užitím integrace per partes nebo pomocí substituce:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx ; \int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx ; \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx ; \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx ; \int_1^e x \ln^2(x) dx ; \int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx ; \int_0^2 \frac{x}{1+x^4} dx ;$$
$$\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx ; \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) dx ; \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx ; \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}} dx ; \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx ;$$
$$\int_2^3 \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx ;$$

A pozor na substituci!

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx ; \int_0^{4\pi} \frac{1}{3 - \sin x} dx ; \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 3\cos^2(x)} dx \text{ (substituce } \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t \text{)} .$$

(3. Integrál přes neomezený interval – pro zajímavost, na přednášce jen zmíněno:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \text{ a } (?) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx ; \int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2} dx \text{ a } (?) \int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2} dx ; \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx ; \int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2(x)} dx .)$$

2. Vlastnosti určitého integrálu.

Ukažte, že platí:

1. Je-li $f \in R(-a, a)$, $a > 0$ a lichá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

2. Je-li $f \in R(-a, a)$, $a > 0$ a sudá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

3. Je-li funkce f definovaná v R , $f \in R(0, p)$, $p > 0$ a p – periodická, pak $f \in R(a, a+p)$ pro každé $a \in R$

a platí $\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx$.

4. Je-li funkce f spojitá v $[-a, a]$ ($a > 0$) a lichá, pak primitivní funkce k funkci f je v $(-a, a)$ sudá.

5. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x}$.

3. Aplikace určitého integrálu:

(zatím jen předběžně – pro další cvičení, pokud se bude probírat na přednášce nebo to bude úkolem cvičení)

a) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω , je-li ω ohraničená

- 1) grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 2 - x$;
- 2) grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 2 - x$ a osou x ;
- 3) grafem funkce $y = x - 2$ a parabolou $y^2 = x$;
- 4) grafy funkcí $y = x$ a $y = \frac{4}{x}$ a přímkou $x = 1$;
- 5) grafem funkce $y = \ln x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $[1, 0]$ a přímkou $x = e$;
- 6) grafy funkcí $y = x^2$ a $y = x \cdot \sin x$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$;
- 7) grafy funkcí $y = x^2$ a $y = x \cdot \arctg x$ a přímkou $x = 1$;
- 8) grafy funkcí $y = \arctg x$ a $y = \arctg \sqrt{x}$;
- 9) obsah kruhu a elipsy.

b) (i) „Zkontrolujte“ vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru R .

(ii) Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x , kde

- 1) $\omega = \left\{ [x, y]; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x \right\}$;
- 2) $\omega = \left\{ [x, y]; 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x \right\}$;
- 3) $\omega = \left\{ [x, y]; 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x \right\}$;
- 4) $\omega = \left\{ [x, y]; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a > 0, b > 0 \right\}$;
- 5) omezená oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y = xe^x$ a $y = x$ a přímkou $x = 1$.

c) Určete délku

(i) kružnice o poloměru r ;

(ii) grafu funkce

- 1) $y = 2\sqrt{x}$, $x \in (1, 2)$;
- 2) $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
- 3) $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq a$ („tahák“: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, $x \in \mathbb{R}$).